第３講　三角・指数・対数関数

1　平面上の４点 O(0, 0), A(0, 3), B(1, 0), C(3, 0) について，次の問いに答えよ．

(1) sin ∠BAC を求めよ．

(2) 点 P が線分 OA 上を動くとき，sin ∠BPC の最大値とそれを与える点 P の座標を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x に関する 2 つの不等式

$$1+\frac{1}{\log_3 x}-\frac{2}{\log_5 x}<0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)} \quad \cdots\cdots②$$

について，次の問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1)　①を解け．

(2)　①の解がすべて②を満たすような a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$e=2.718$ とする．e^e に最も近い整数を求めよ．必要ならば次の近似値を用いよ．
$\log_e 2 = 0.693$，$\log_e 3 = 1.099$，$\log_e 5 = 1.609$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　三角・指数・対数関数

1 平面上の 4 点 O(0, 0), A(0, 3), B(1, 0), C(3, 0) について，次の問いに答えよ．

(1) sin∠BAC を求めよ．

(2) 点 P が線分 OA 上を動くとき，sin∠BPC の最大値とそれを与える点 P の座標を求めよ．

(1) △OAC は　OA＝OC＝3 の直角二等辺三角形より　$\angle \mathrm{OAC}=\dfrac{\pi}{4}$

また，△OAB において　OB=1 であるから，三平方の定理より，

$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ である．

よって　
$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC}&=\sin(\angle\mathrm{OAC}-\angle\mathrm{OAB})\\&=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\angle\mathrm{OAB}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\angle\mathrm{OAB}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\angle\mathrm{OAB}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

(2) P(0, t) ($0<t\leqq 3$) とおく．($t=0$ は明らかに sin∠BPC を最大にする値ではない)

三平方の定理より $\mathrm{BP}=\sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{CP}=\sqrt{t^2+9}$

よって　
$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BPC}&=\sin(\angle\mathrm{OPC}-\angle\mathrm{OPB})\\&=\sin\angle\mathrm{OPC}\cos\angle\mathrm{OPB}-\cos\angle\mathrm{OPC}\sin\angle\mathrm{OPB}\\&=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BP}}-\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BP}}\\&=\frac{3}{\sqrt{t^2+9}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\frac{2t}{\sqrt{t^4+10t^2+9}}\\&=\frac{2}{\sqrt{t^2+10+\dfrac{9}{t^2}}}\end{aligned}$$

$t>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均)　から

$$t^2+\frac{9}{t^2}+10\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{9}{t^2}}+10=16$$

等号成立は　$t^2=\dfrac{9}{t^2}$ より　$t^2=3$　　$0<t\leqq 3$ より，$t=\sqrt{3}$ のとき

よって，$t^2+\dfrac{9}{t^2}+10$ は，$t=\sqrt{3}$ のとき最小値 16 をとる．

以上より，sin∠BPC は $\mathbf{P}\boldsymbol{(0,\ \sqrt{3})}$ のとき，最大値 $\dfrac{2}{\sqrt{16}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x に関する2つの不等式

$$1+\frac{1}{\log_3 x}-\frac{2}{\log_5 x}<0 \quad \cdots\cdots ① \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)} \quad \cdots\cdots ②$$

について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1)　①を解け．　　(2)　①の解がすべて②を満たすような a の値の範囲を求めよ．

(1)　①より　$1+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}x}-\dfrac{2\log_{10}5}{\log_{10}x}<0$

両辺に $(\log_{10}x)^2\ (>0)$ をかけると

$$(\log_{10}x)^2+\log_{10}3\cdot\log_{10}x-2\log_{10}5\cdot\log_{10}x<0$$

$$(\log_{10}x)^2-(\log_{10}5^2-\log_{10}3)\log_{10}x<0$$

$$\log_{10}x\left(\log_{10}x-\log_{10}\frac{25}{3}\right)<0 \quad よって \quad 0<\log_{10}x<\log_{10}\frac{25}{3}$$

したがって　$\boldsymbol{1<x<\dfrac{25}{3}}$

これは①における真数条件 $x>0$ および（分母）$\neq 0$ を満たす．

(2)　②の左辺$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}=3^{-a\log_3 2}=3^{\log_3 2^{-a}}=2^{-a}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}$ より　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)}$

よって　$a>x(x-a+1)$ より，$x^2+(1-a)x-a<0$　　$(x+1)(x-a)<0$

$a<-1$ のとき　$a<x<-1$　①がこれを満たすことはない．よって不適．

$a=-1$ のとき　この不等式の解はなく不適．

$a>-1$ のとき　$-1<x<a$　①がこれを満たすのは $a\geqq\dfrac{25}{3}$ のとき．

以上より　$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{25}{3}}$

3　$e=2.718$ とする．e^e に最も近い整数を求めよ．必要ならば次の近似値を用いよ．

$\log_e 2=0.693$，$\log_e 3=1.099$，$\log_e 5=1.609$

$e^e=k$ とおき，両辺 e を底とする対数をとると　$\log_e e^e=\log_e k$ より，$\log_e k=e=2.718$

$$\log_e 15=\log_e(3\times5)=\log_e 3+\log_e 5=1.099+1.609=2.708$$

$$\log_e 16=\log_e 2^4=4\log_e 2=4\times0.693=2.772 \quad より \quad \log_e 15<\log_e k<\log_e 16$$

よって　$15<k<16$

ここで k が15と16のどちらに近いか調べる．

$$15.5=\frac{15+16}{2}>\sqrt{15\times16} \quad より$$

$$\log_e 15.5>\log_e\sqrt{15\times16}=\frac{1}{2}(\log_e 15+\log_e 16)=\frac{1}{2}(2.708+2.772)=2.740$$

よって　$\log_e 15.5>2.740>2.718=\log_e k$　　$15.5>k$

したがって，k は16よりも15に近い．以上より，e^e に最も近い整数は　**15**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上の原点Oを中心とする半径１の円周上に，点Aがある．ただし，Aは第１象限の点である．点Aから x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をB，線分ABを２：１に内分する点をCとする．$\theta = \angle \mathrm{AOB}$ のときの $\tan \angle \mathrm{BOC}$ と $\tan \angle \mathrm{COA}$ の値をそれぞれ $f(\theta)$，$g(\theta)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2)　$g(\theta)$ の $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　［1］　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であり，$xyz^3=1000$，$x^2yz=10$ が成り立つとき，
$L=(\log_{10}y)(\log_{10}x+8)$ の最大値を求めよ．

［2］　$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ で $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=4$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　三角・指数・対数関数　　練習問題　解答

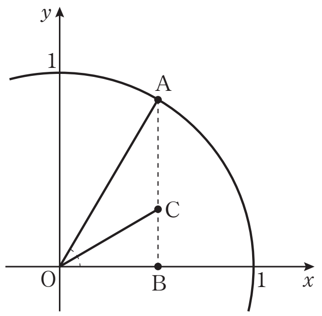
1　座標平面上の原点Oを中心とする半径1の円周上に，点Aがある．ただし，Aは第1象限の点である．点Aからx軸に下ろした垂線とx軸との交点をB，線分ABを2：1に内分する点をCとする．$\theta=\angle\mathrm{AOB}$のときの$\tan\angle\mathrm{BOC}$と$\tan\angle\mathrm{COA}$の値をそれぞれ$f(\theta)$，$g(\theta)$とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)$と$g(\theta)$をθを用いて表せ．

(2)　$g(\theta)$の$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$における最大値と，そのときのθの値を求めよ．

解答例

(1)　$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$より$\mathrm{B}(\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{3}\sin\theta\right)$



三角比の定義より，円周上の点は媒介変数θを用いて表せる．
同様に，$x^2+y^2=r^2$上の点は$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$と表せる．

よって　$f(\theta)=\tan\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{\frac{1}{3}\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\tan\theta}$

$$g(\theta)=\tan(\angle\mathrm{BOA}-\angle\mathrm{BOC})$$
$$=\frac{\tan\angle\mathrm{BOA}-\tan\angle\mathrm{BOC}}{1+\tan\angle\mathrm{BOA}\cdot\tan\angle\mathrm{BOC}}$$
$$=\frac{\tan\theta-\frac{1}{3}\tan\theta}{1+\tan\theta\cdot\frac{1}{3}\tan\theta}=\boldsymbol{\frac{2\tan\theta}{3+\tan^2\theta}}$$

(2)　$\tan\theta=t$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$t>0$

このとき，$g(\theta)=\boxed{\dfrac{2t}{3+t^2}=\dfrac{2}{\frac{3}{t}+t}}$

$g(\theta)$はこの変形をせずとも数学Ⅲの微分法を使えば最小値を求めることができる．分数関数において（分子の次数）≧（分母の次数）であれば「次数下げ」をすることは基本であるが，左式のような形を見たときに「**分母に寄せる**」経験を積んでおくと強くなるであろう．

相加平均≧相乗平均の関係より

$$(g(\theta)\text{の分母})=t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}\geqq 2\sqrt{3}$$

等号成立は $t=\dfrac{3}{t}$　つまり　$t=\sqrt{3}\ (>0)$　のとき成立し，このとき　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$(g(\theta)$の分母$)\geqq 2\sqrt{3}$

したがって，$g(\theta)=\dfrac{2}{t+\frac{3}{t}}\leqq\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$より，

$g(\theta)$の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　$\left(\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}\textbf{のとき}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であり，$xyz^3=1000$，$x^2yz=10$ が成り立つとき，$L=(\log_{10}y)(\log_{10}x+8)$ の最大値を求めよ．

解答例

$xyz^3=1000$ において，両辺の常用対数をとると

$\log_{10}xyz^3=\log_{10}1000$ より，$\log_{10}x+\log_{10}y+3\log_{10}z=3$　……①

$x^2yz=10$ において，同様に　$2\log_{10}x+\log_{10}y+\log_{10}z=1$　……②

ここで，$\log_{10}x=X$，$\log_{10}y=Y$，$\log_{10}z=Z$ とおくと

①より　$X+Y=3-3Z$

②より　$2X+Y=1-Z$

これらより，$X=2Z-2$，$Y=-5Z+5$

このとき，$L=Y(X+8)=(-5Z+5)(2Z+6)=-10(Z-1)(Z+3)=-10(Z+1)^2+40$

よって，L の最大値は **40**

対数をとることは，今回の問題の設定では自然．その上で，「べき(累乗)」「積」を「和」「差」にしたことを強く意識しておかねばならない．

2　[2]　$x\geqq1$，$y\geqq1$ で $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2=4$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ．

解答例

$\log_2x=X$，$\log_2y=Y$ とおくと，$x\geqq1$，$y\geqq1$ より　$X\geqq0$，$Y\geqq0$　……①

$(\log_2x)^2+(\log_2y)^2=4$ より，$X^2+Y^2=4$　……②

①，②の条件の下に，$\log_2xy=\log_2x+\log_2y=X+Y$ の最大，最小を考える．

対数をとることは [1] 同様, 今回の問題の設定では自然ではあるが，対数関数は「単調増加（単調減少)」であるため，真数の値と対数の値が 1 ： 1 に対応している．よって，対数の値の最大・最小が真数（今回であれば xy）の最大・最小と一致する．頻出事項である．

①，②より，$X=2\cos\theta$，$Y=2\sin\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$X+Y=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi\right)$$

1(1)参照のこと．半径は 2 である．なお，変域により媒介変数にも変域を設定する必要がある．

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$

したがって，$2\leqq X+Y\leqq2\sqrt{2}$ より，$\log_2 2^2\leqq\log_2xy\leqq\log_2 2^{2\sqrt{2}}$　つまり　$4\leqq xy\leqq2^{2\sqrt{2}}$

ゆえに，xy の**最大値は $2^{2\sqrt{2}}$**，**最小値は 4**

※ほかにも $X+Y=k$ とおき，この「傾き -1 の直線」が $X^2+Y^2=4$，$X\geqq0$，$Y\geqq0$（「円周の一部」）と共有点をもつときの y 切片 k の最大値，最小値を求める方法や，連立して Y を消去してできた「X の2次方程式」が $X\geqq0$ に実数解をもつ条件を考え , そのときの k の取り得る値の範囲から最大値，最小値を導く方法などが代表的である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。